ESSEC Mathématiques III
OPTION ÉCONOMIQUE CONCOURS 2006
Lundi 15 mai 2006, de 8 h. à 12 h..

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 Probabilités et fonctions de deux variables.

Cent boules, cinquante blanches et cinquante noires, sont réparties dans deux urnes notées U_1 et U_2.
On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard une boule dans l'urne choisie.
L'objectif de cet exercice est de déterminer, si elle existe, la répartition pour laquelle la probabilité de tirer une boule blanche est maximale ainsi que la valeur de cette probabilité.

1. Justifier qu'il existe une répartition des boules dans les urnes pour laquelle la probabilité de tirer une boule blanche est maximale.

2. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche dans le cas où les urnes sont composées de 20 boules blanches et 40 boules noires pour l'une, 30 boules blanches et 10 boules noires pour l'autre.

On peut donc répartir les boules dans les urnes de telle sorte que la probabilité de tirer une boule blanche soit strictement supérieure à 1/2.

3. On note x et y les nombres respectifs de boules blanches et noires contenues dans 1'urne U_1 (x et y sont donc deux entiers compris au sens large entre 0 et 50).

a) Déterminer la probabilité $f(x\,;y)$ de tirer une boule blanche (on distinguera l'expression générale, fonction des entiers x et y, des deux cas particuliers où l'une des urnes est vide).
b) Justifier que, pour tous entiers x et y compris au sens large entre 0 et 50, on a l'égalité :
$$f(50-x\,;50-y) = f(x\,;y)\ .$$
c) Montrer, pour tout entier y de [0 ; 50], l'inégalité : $f(0\,;y) \leq \dfrac{1}{2}$,
et en déduire que la répartition des boules recherchée est telle que x appartient à [1 ; 49] .
d) Quelles sont les répartitions pour lesquelles la probabilité de tirer une boule blanche est égale à 1/2 ?

4. On note n le nombre de boules contenues dans 1'ume U_1, ($n = x + y$) .
Montrer que l'on peut se restreindre à des valeurs de n inférieures ou égales à 50 .

En fait, on peut même se restreindre à des valeurs de n strictement comprises entre 0 et 50 car $f(0\,;0) = 1/4$ et, d'après le résultat de la question **3.d)** , la probabilité de tirer une boule blanche est égale à 1/2 lorsque n est égal à 50.

5. On suppose désormais que les variables x et n varient de façon continue dans l'intervalle]0 ; 50[et on définit la fonction g de deux variables sur $]0\,;50[\times]0\,;50[$ en posant :
$$g(x\,;n) = \frac{x}{n} + \frac{50-x}{100-n}\ .$$
a) Soit n un réel de]0 ; 50[.
Déterminer les variations de la fonction $x \mapsto g(x\,;n)$ sur l'intervalle]0 ; 50[et en déduire l'entier x de]0 ; 50[pour lequel le réel $g(x\,;n)$ est maximum sous la condition : $x \leq n$.
b) On pose, pour tout réel n de]0 ; 50[, $h(n) = g(n\,;n)$.

Déterminer $h'(n)$; dresser le tableau de variations de la fonction h et en déduire la valeur de l'entier n pour laquelle $h(n)$ atteint son maximum.

6. Conclure relativement à l'objectif de l'exercice annoncé en introduction.

Exercice 2 . Probabilités et informatique.

On se propose d'étudier des algorithmes de simulation de lois de probabilité, écrits en langage Pascal.
La procédure randomize initialise le générateur de nombres aléatoires. Une fois celle-ci appelée, les appels successifs à la fonction random simulent la réalisation de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité uniforme sur]0 ; 1[. Des programmes demandés, on n'écrira que la partie « décisive » de l'algorithme, à l'image du premier encadré de la page 3.

Dans tout l'exercice, on désigne par :

- $(\Omega ; \mathcal{F} ; P)$ un espace probabilisé,
- U une variable aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}$ de loi de probabilité uniforme sur]0 ; 1[
- X la variable aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}$ dont on souhaite simuler des réalisations,
- p un réel strictement compris entre 0 et 1,
- n un entier naturel non nul.

I. Lois binomiales

1. a) Écrire un algorithme qui simule la réalisation d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

b) Justifier que l'algorithme ci-dessous simule la réalisation d'une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

```
x : = 0 ;
for k: = 1 to  n  do
begin
  u : = random ;
  if u < p then x: = x + 1 ;
end ;
write(x) ;
```

Quel est le nombre d'appels à la fonction random ?

2. Soient p_1 et p_2 des réels strictement compris entre 0 et 1. On pose $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.
On effectue n épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètres p_1 .
Y désignant le nombre de succès lors de cette première série d'épreuves, on effectue Y épreuves de Bernoulli indépendantes, de paramètres p_2 . On s'intéresse alors à la variable aléatoire X donnant le nombre de succès dans cette seconde série d'épreuves.

a) Terminer le programme de simulation de X ci-dessous.

```
y : = 0 ;
for k : = 1 to  n  do
begin
   u: = random ;
  if u < p1  then  y : = y + l;
end;
 x : = 0 ;
for  k: = 1  to  ……
……..
write (x)
```

b) **i)** Préciser la loi de Y et l'ensemble des valeurs prises par X.

ii) Soit i un entier compris au sens large entre 1 et n.
Quelle est la loi de X conditionnée par l'événement $(Y = i)$?

iii) Vérifier que, pour tous entiers i et j tels que : $0 \leq j \leq i \leq n$, on a l'égalité :

$$\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}$$

puis, pour tout entier j compris au sens large entre 0 et n, établir, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(X = j) = \binom{n}{j}(p_1 p_2)^j \sum_{i=j}^{n}\binom{n-i}{i-j}(p_1 q_2)^{i-j} q_1^{\,n-i}.$$

iv) Après avoir simplifié le résultat précédent, reconnaître la loi de X.

c) Déterminer le nombre moyen d'appels à la fonction random du programme de simulation de X.

II. Méthode d'inversion

Cette méthode repose sur la détermination d'une fonction Q telle que $Q(U)$ suive la même loi que X.
(On rappelle que U est une variable aléatoire de loi de probabilité uniforme sur]0 ; 1[.)

1. Loi exponentielle

Dans cette question, X suit la loi exponentielle de paramètre a (a réel strictement positif) .

a) Démontrer que les variables aléatoires X et $-\frac{1}{a}\ln(1-U)$ ont la même fonction de répartition.

b) Justifier alors l'algorithme de simulation de X suivant :

```
u : = random ;
x : = - ln (u) /a ;
write (x) ;
```

2. Loi géométrique

Dans cette question, X suit la loi géométrique de paramètre p.

a) En considérant que X est le temps d'attente du premier succès dans un processus de Bernoulli, écrire en langage Pascal un programme de simulation de X qui utilise une boucle repeat.
Quel est le nombre moyen d'appels à la fonction random ?

b) La méthode précédente étant « coûteuse » pour les petites valeurs de p, on se propose d'écrire un nouvel algorithme qui n'appelle qu'une seule fois la fonction random .

i) On suppose que $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

- Prouver que, pour tout entier naturel k non nul : $P(k-1 \leq Y < k) = (e^{-a})^{k-1}(1-e^{-a})$.
- En déduire que l'on peut choisir a tel que X et la variable aléatoire Ent (Y) + 1 suivent la même loi (on rappelle que Ent désigne la fonction partie entière).

ii) Écrire l'algorithme correspondant. On rappelle qu'en langage Pascal, si une variable x contient un réel positif ou nul, trunc (x) retourne la partie entière de ce réel.

3. Cas d'une loi discrète finie

On suppose ici que X prend un nombre fini n de valeurs $x_1, \ldots, x_n$, avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. On pose : $F_0 = 0$ et, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n, $p_k = P(X = x_k)$, $F_k = P(X \leq x_k)$.

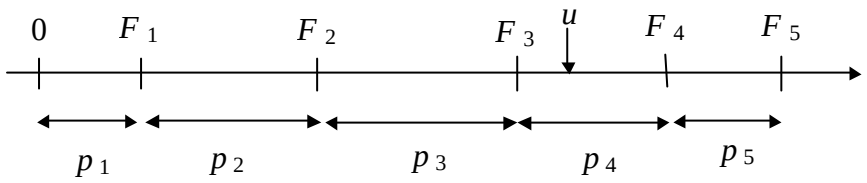
Soit Q la fonction « en escalier » de]0 ; 1[dans $\mathbb{R}$ définie par :

pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n, $Q(u) = x_k$ si $F_{k-1} < u \leq F_k$.
Q est appelée la fonction quantile de X.

a) Vérifier que, pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n, on a : $P(Q(U) = x_k) = p_k$.

b) D'après la question précédente, $Q(U)$ et X ont la même loi. Programmer une simulation de X revient donc à trouver, pour une réalisation u de U, le dernier indice k tel que : $F_{k-1} < u$ et décider que X prend la valeur x_k .

i) Dans la situation représentée par le schéma ci-dessous, quelle est la valeur prise par X ?



ii) En considérant que les variables F[1] , … , F[n] d'un tableau F contiennent les valeurs F_1 , ... , F_n celles T [1] , ... , T [n] d'un tableau T les valeurs x_1 , ... , x_n compléter le programme de simulation de X ci-dessous, et démontrer que le nombre moyen m de passages dans la boucle while vérifie : $m = \sum_{k=1}^{n} (k-1)\, p_k$

```
k : = 1 ;
u : = random ;
while …….. do ……. ;
x : = …….. ;
write (x) ;
```

4. Loi binomiale.

Dans cette question, on suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n ; 1/2)$.

a) Un premier programme.

On adapte le programme précédent (question II 3. b) ii)) de simulation de X au cas de la loi binomiale $\mathcal{B}(2n ; 1/2)$.

i) • Démontrer que, pour tous entiers naturels r et m tels que : $1 \le r \le m$, on a : $\binom{m}{r} = \frac{m}{r}\binom{m-1}{r-1}$

• En déduire l'égalité : $\sum_{k=1}^{2n} k\binom{2n}{k} = n\, 2^{2n}$.

ii) Exprimer le nombre moyen m_n de passages dans la boucle while en fonction de n .

b) Amélioration du programme

On pose dans cette question :

$a_0 = \binom{2n}{n}$, $a_1 = \binom{2n}{n-1}$, $a_2 = \binom{2n}{n+1}$, $a_3 = \binom{2n}{n-2}$, $a_4 = \binom{2n}{n+2}$ ... , $a_{2n-1} = \binom{2n}{0}$, $a_{2n} = \binom{2n}{2n}$.

i) • Démontrer que, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et $n-1$; $\binom{2n}{k} \le \binom{2n}{k+1}$

• En déduire les inégalités : $a_0 \ge a_1 \ge ... \ge a_{2n}$.

ii) Pour améliorer le programme précédent, on range dans l'ordre décroissant les probabilités $p_0 ; p_1 ; ... ; p_{2n}$ que X prennent les valeurs 0 ; 1 ; ... ; $2n$ en posant : $p'_0 = p_n = 2^{-2n} a_0$; $p'_1 = p_{n-1} = 2^{-2n} a_1$; $p'_2 = p_{n+1} = 2^{-2n} a_2$; ... ; $p'_{2n} = p_{2n} = 2^{-2n} a_{2n}$.

les variables successives du tableau F contenant les nombres $\sum_{i=0}^{k} p'_i$

(l'entier k variant de 0 à $2n$), et les variables successives du tableau T contenant les valeurs

n ; $n-1$; $n+1$; $n-2$; $n+2$; ... ; 0 ; $2n$.

- Préciser alors le nombre moyen m'_n de passages dans la boucle while en fonction de n .
  Pour cela, on admettra l'égalité : $\sum_{k=0}^{2n} k\, a_k = (2n + 1/2) \times \binom{2n}{n} - 2^{2n-1}$.
- Enfin, proposer un équivalent simple de m'_n quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
  et conclure quant à l'intérêt de l'agencement $p'_0 , p'_1 , \ldots , p'_n$ des probabilités $p_0 , p_1 , \ldots , p_n$.